Rozšíření MA1 - domácí úkol 6

II. Extrémy funkcí dvou proměnných (zkuste vyřešit aspoň dva příklady) :

Snad jednoduchý úvod do problémů, spojených s existencí a „hledáním" extrémů (reálných) funkcí více proměnných, je v přednášce pro MA2, z 15.4.2020. Je zde i řada jednoduchých příkladů, které snad mohou pomoci pochopit základní pojmy, které jsou třeba pro řešení úloh o extrémech funkcí více proměnných, a snad i užitečnost „extremálních" úloh. A snad pomohou i pochopit cesty k vyšetření existence extrémů. Obecně je vyšetřování extrémů funkcí více proměnných obtížné a náročné, proto v MA2 i v Rozšíření MA1 jsme se omezili jen na nejjednodušší případ – na vyšetřování extrémů funkcí dvou proměnných.

Nejprve shrneme (opět) základní poznatky (už jen pro $n=2$, ale můžete si definice a některá tvrzení „zobecnit")

1. Definice:

a) Globální extrém :

Mějme funkci $f: G \subset R^2 \to R$; říkáme, že funkce f má v bodě $X_0=(x_0,y_0)\in G$ globální maximum (resp. globální minimum), když pro každý bod $(x,y)\in G$ je $f(x,y) \leqq f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) \geqq f(x_0,y_0)$). Je-li pro každý bod $(x,y)\in G$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$), nazýváme takový globální extrém ostrým globálním extrémem (ostré globální maximum, resp. ostré globální minimum).

b) Lokální extrém :

$f: G\subset R^2 \to R$ má v bodě $(x_0,y_0)\in G^0$ (tj. ve vnitřním bodě G) lokální maximum (resp. lokální minimum), když existuje okolí $\mathcal{U}(x_0,y_0)\subset G$ bodu (x_0,y_0) tak, že platí pro všechny body $(x,y)\in\mathcal{U}(x_0,y_0)$ $f(x,y) \leqq f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) \geqq f(x_0,y_0)$).

Je-li $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$) v prstencovém okolí bodu (x_0,y_0) $P(x_0,y_0)$ $\left(= U(x_0,y_0) \setminus \{[x_0,y_0]\}\right)$, říkáme, že f má v bodě $(x_0,y_0) \in G^0$ ostré lokální maximum (resp. minimum).

„Cvičně" – zapišme pomocí kvantifikátorů:
funkce $f: G \subset R^2 \to R$ má v bodě $(x_0,y_0) \in G^0$ lokální maximum (resp. lokální minimum), když platí:

$\exists\, U(x_0,y_0)\ \forall (x,y) \in U(x_0,y_0): \ f(x,y) \leqq f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) \geqq f(x_0,y_0)$);

Když platí, že

$\exists\, U(x_0,y_0)\ \forall (x,y) \in U(x_0,y_0),\ (x,y) \neq (x_0,y_0): \ f(x,y) < f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$), říkáme, že f má v bodě (x_0,y_0) ostré lokální maximum (resp. ostré lokální minimum).

Jednoduché příklady uvedených extrémů (v definicích) najdete na začátku citované přednášky.

A co o extrémech „víme"? A jak je máme hledat, a budeme-li mít štěstí, i najít, nebo ukázat, že zkoumaná funkce extrémy na dané množině nemá?

Co „víme" o existenci globálních extrémů funkce $f: \emptyset \neq G \subset R^2 \to R$:

U funkcí jedné proměnné (v MA1) byla věta „o existenci extrémů":

Věta: Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$, pak f nabývá v $\langle a,b \rangle$ svých globálních extrémů.

A analogie pro funkce dvou proměnných (i pro funkce n proměnných obecně) platí pro spojitou funkci f na kompaktní množině $G \subset R^2$ (R^n); neří-li jsme, že $G \subset R^2$ (R^n) je kompaktní, právě když G je množina omezená a uzavřená.

Věta: Je-li $G \subset R^2 (R^n)$ kompaktní množina, a f je spojitá na G, pak f nabývá na G svých globálních extrémů (tj. nabývá f svého globálního maxima i globálního minima).

Poznámka: tedy kompaktní množina $G \subset R^2 (R^n)$ je „rozšíření" pojmu uzavřeného intervalu.

V „ostatních" případech „nic nevíme", a musíme existenci extrémů „zkoumat"; např. když $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = (\pm)\infty$ (kde (a_1,a_2) je limitní bod množiny G), pak f nemá globální maximum (minimum) v G.

A jak můžeme extrémy funkce najít?

Má-li funkce f v bodě (x_0,y_0) globální extrém, pak

(i) je-li $(x_0,y_0) \in G^0$ (tj. (x_0,y_0) je vnitřní bod množiny G, tedy existuje okolí $U(x_0,y_0) \subset G$), pak je v bodě (x_0,y_0) i extrém lokální funkce f – tedy máme další úkol – naučit se „hledat" lokální extrémy;

(ii) globální extrémy mohou být funkce ale i v bodech hranice, patří-li tyto body do G; v jednodušších případech je hranice dána rovnicí $F(x,y)=0$, která „svazuje" proměnné x, y, a pokud tuto vazbu umíme explicitně „vyjádřit" (tj. například $y=\varphi(x)$, $x \in \mathcal{I}$, nebo $x=\psi(y)$, $y \in \mathcal{J}$) na hranici množiny G je pak funkce dvou proměnných vlastně už jen funkcí jedné proměnné ($f(x,\varphi(x))$, $x \in \mathcal{I}$, nebo $f(\psi(y),y)$, $y \in \mathcal{J}$), a vyšetřit extrémy funkcí proměnné jedné už pak „umíme" lépe.

Příklady jsou v přednášce z 15.4.20, a bude i příklad v našem domácím úkolu.

Zbývá tedy problém z části (i) – jak najít lokální extrémy funkce $f: G \subset R^2 \to R$:

1) body „kritické" pro lokální extrém:
(tj. body „podezřelé" z lokálního extrému, body, kde funkce „nelze" mít lokální extrém)

(i) body nespojitosti funkce f;
(ii) body, kde neexistuje některá z parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ fce f;

(iii) zbývá – když „není" ani (i) ani (ii):

Věta: Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, a nechť existují $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Pak platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0, \text{ tj. } \nabla f(x_0,y_0) = (0,0).$$

Tedy, body podezřelé z extrému v případě, že existují $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ v G^0, jsou ty body $(x_0,y_0) \in G^0$, kde $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.

Poznámka: 1) věta platí i pro funkce $f: G \subset R^n \to R$, je-li v $X_0 \in G^0$ lokální extrém fce f, a ex.-li $\nabla f(X_0)$, pak $\nabla f(X_0) = \vec{o}$

2) a srovnání s „podezřelými" body z lokálního extrému fce jedné proměnné (z MA1) – ex.-li $f'(x_0)$, a f má v x_0 lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, u funkcí „více" proměnných – – derivace $f'(x_0)$ je „nahrazena" vším derivacemi – – $\nabla f(X_0) = \vec{o}$!

(nazývají se též body stacionární)

2) umíme-li najít kritické body pro lokální extrém, je třeba mít ještě nástroj, jak „poznat", zda je „v tom „podezřelém" bodě" lokální extrém, nebo „není". – to je obecně těžké, musí „se vyšetřit hodnoty funkce v okolí „podezřelého" bodu", ale pro „hezké" funkce pomůže následující pomůcka – determinant, vytvořený z druhých derivací funkce, zvaný Hessián:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} .$$

a platí:

<u>Věta</u>: Nechť $f : G \subset R^2 \to R$, $(x_0,y_0) \in G^0$, $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{o}$, a nechť funkce f má v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace druhého řádu (píšeme $f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$). Pak platí:

1) je-li $H_f(x_0,y_0) > 0$, f má v bodě (x_0,y_0) ostrý lokální extrém,
pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ má f v (x_0,y_0) ostré lokální minimum,
pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ má f v (x_0,y_0) ostré lokální maximum;

2) je-li $H_f(x_0,y_0) < 0$, f nemá v bodě (x_0,y_0) lokální extrém; bod (x_0,y_0) se pak nazývá <u>sedlový bod funkce</u>.

Je-li $H_f(x_0,y_0) = 0$, pak věta nic neříká, a existenci extrému musíme „zkoumat" jinak, může zde být neostrý lokální extrém, ale extrém zde být nemusí (opět – toto vyšetřování může být dost obtížné!).

<u>Poznámka</u>: Odvození předchozí věty je naznačeno pro zájemce v uvedené přednášce, ale myslím, že „stačí" o Hessiánu a jeho užitečnosti vědět (i bez důkazu).

1. Vyšetřete v R^2 lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$.

(i) extrémy globální:

zadaná funkce je spojitá na R^2, což ale není množina kompaktní (není omezená), tedy nemůžeme o existenci globálních extrémů funkce $f(x,y)$ na R^2 nic říci „a priori“, funkce na R^2 globální extrémy mít může, ale také nemusí.

Má-li funkce f globální extrém, pak v tomto bodě je i extrém lokální, tedy hledáme „kritické“ body pro lokální extrémy - zde, $f \in C^{\infty}(R^2)$, hledáme body stacionární; pak vyšetřujeme chování funkce v bodech (x,y) „vzdalujících“ se od počátku (podobně jako u funkce jedné proměnné, spojitých v R, jsme „podezřelé“ hodnoty z extrémů funkce „srovnávali“ s limitami pro $x \to \pm\infty$).

To se často „podaří“ vyšetřením chování funkce na podmnožinách, kde naše funkce dvou proměnných už bude jen funkcí proměnné jedné, a to „umně“ - ukážeme si to zde: .

vyšetříme funkci $g(x) = f(x,0)$ (tj. „zvolili jsme si osu x“):

$g(x) = f(x,0) = x^3 + 6x^2$, a pak je

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3+6x^2) = \pm\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funkce $f(x,y)$ nenabývá v R^2 ani globální maximum ($\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$), ani globální minimum ($\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$).

(ii) lokální extrémy funkce f:

1) $f(x,y) \in C^{\infty}(R^2)$, tj. i $f(x,y) \in C^{(1)}(R^2)$, tedy lokální extrémy funkce f může mít jen ve stacionárních bodech, tj. v bodech, kde je nulový gradient funkce f;

zde $\quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (3x^2+y^2+12x,\ 2xy+2y)$,

tedy pro stacionární body platí :

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3x^2 + y^2 + 12x &= 0 \\ (2) \quad & 2xy + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Musíme tedy řešit soustavu dvou obecně nelineárních rovnic (u funkce n-proměnných soustava n obecně nelineárních rovnic), což bývá často dost „obtížné";

a v našem příkladu :

(2) můžeme zapsat : $\quad y(x+1)=0$, což má řešení
$\quad y=0$ nebo $x=-1$;

a pak z rovnice (1) dostaneme :

pro $y=0$: $\quad 3x^2+12x=0 \iff x(x+4)=0$, tedy $x=0$ nebo $x=-4$,

a odtud „máme" dva stacionární body : $A_1=[0,0]$; $A_2=[-4,0]$;

pro $x=-1$: $\quad 3+y^2-12=0 \iff y^2=9$, tj. $y_1=3, y_2=-3$,

a máme další dva stacionární body : $A_3=[-1,3]$; $A_4=[-1,-3]$

A jiné stacionární body už naše funkce nemá.

2) A nyní máme rozhodnout, zda v nalezených stacionárních bodech (v 1)) je, či není lokální extrém, a v případě, že ano, zda je zde lokální maximum nebo lokální minimum. Užijeme k tomu Hessián dané funkce:

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x+12 , & 2y \\ 2y , & 2(x+2) \end{vmatrix} .$$

$A_1=[0,0]$: $\quad H(0,0)=\begin{vmatrix} 12 , & 0 \\ 0 , & 2 \end{vmatrix} = 24>0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=12>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f má v bodě $A_1=[0,0]$ ostré lokální minimum;

$A_2=[-4,0]$: $\quad H(-4,0)=\begin{vmatrix} -12 , & 0 \\ 0 , & -6 \end{vmatrix} = 72>0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,0)=-12<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f má v bodě $A_2=[-4,0]$ ostré lokální maximum;

$A_3=[-1,3]$: $\quad H(-1,3)=\begin{vmatrix} 6 , & 6 \\ 6 , & 0 \end{vmatrix} = -36<0 \Rightarrow$

funkce f v bodě $A_3=[-1,3]$ nemá lokální extrém (bod $[-1,3]$ je sedlový bod funkce f);

$A_4=[-1,-3]$: $\quad H(-1,-3)=\begin{vmatrix} 6 , & -6 \\ -6 , & 0 \end{vmatrix} = -36<0 \Rightarrow$

funkce f nemá v bodě $A_4=[-1,-3]$ lokální extrém (i bod $[-1,3]$ je sedlový bod funkce f).

Dodatek k příkladu 1.

Spočítáno v příkladu už vše máme, ale zkusme ještě trošku něco „navíc"; asi si snadno představíme na grafu funkce dvou proměnných lokální maximum nebo lokální minimum, zvláště pak ostré lokální extrémy. Ale podívejme se trošku blíže na t.zv. sedlové body grafu, pomocí grafu „naší" funkce. Sedlové body funkce jsou stacionární body, ve kterých ale funkce nemá lokální extrém (ani neostrý), to znamená, že v libovolném prstencovém okolí $P((x_0,y_0),\delta)$ $(\delta>0)$ stacionárního bodu funkce f (tj. $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$)

existují body $(x_1,y_1) \in P((x_0,y_0),\delta)$ a $(x_2,y_2) \in P((x_0,y_0),\delta)$ takové, že $f(x_1,y_1) > f(x_0,y_0)$ a $f(x_2,y_2) < f(x_0,y_0)$. Předpokládejme, že funkce f má v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ tečnou rovinu (tj. že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0)), pak, protože $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$, tato tečná rovina je „vodorovná", je rovnoběžná s rovinou $z=0$, a její rovnice je $z = f(x_0,y_0)$. A pak si můžeme i „graficky" charakterizovat sedlový bod (x_0,y_0) – v každém okolí $P((x_0,y_0),\delta)$ jsou body (x_1,y_1) a (x_2,y_2) takové, že bod grafu fce f $(x_1,y_1,f(x_1,y_1))$ je „nad" tečnou rovinou v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ a bod $(x_2,y_2,f(x_2,y_2))$ je „pod" touto tečnou rovinou.

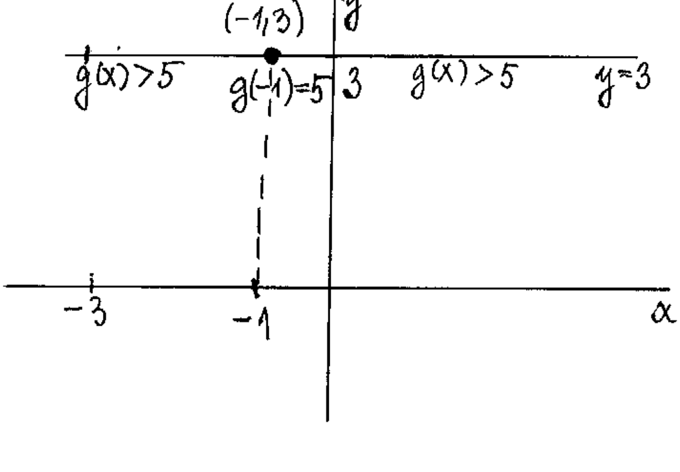
Nejjednodušší příklad sedlového bodu je bod $(0,0)$ u funkce $f(x,y) = y^2-x^2$ (viz přednáška MA2 z 15.4.2020, str. 3,9), odtud lze pochopit i název „sedlový bod" funkce, graf v okolí bodu $(0,0,0)$ připomíná sedlo.

V našem příkladu zde to „sedlo" asi moc není „vidět", ale můžeme si to představit podobně jako u připomenutého příkladu z přednášky, pomocí řezů grafu funkce rovinami, kolmými k rovině $z=0$, a procházejícími bodem grafu $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, tedy bod (x_0,y_0) je námi „početně" určený sedlový bod.

<u>Ukažme si to pro bod $(x_0,y_0) = (-1,3)$ $(f(-1,3)=5)$:</u>

(i) <u>vyšetřujme funkci $g(x) = f(x,3)$</u>:

(graf funkce $g(x)$ je „řez" grafu funkce $f(x,y)$ rovinou $y=3$)



pak $g(x) = x^3+6x^2+9x+9$, $x \in R$,

a $g'(x) = 3x^2+12x+9 = 3(x^2+4x+3)$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$x=-3 \vee x=-1$

(že $g'(-1)=0$ „už víme", neboť $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,3)$);

a dále vidíme:

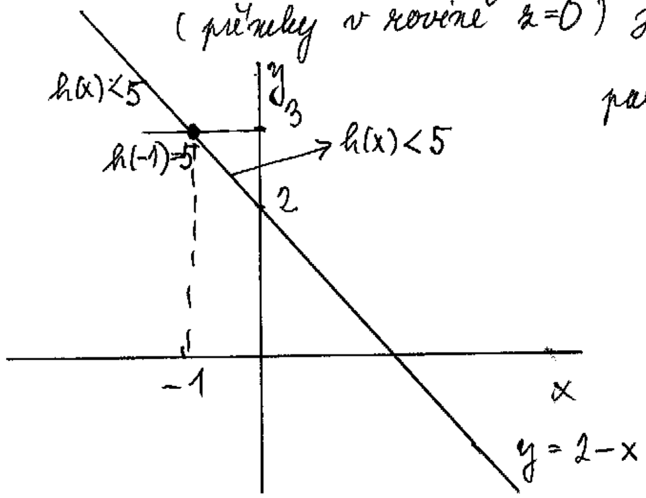
$g'(x) < 0$ v intervalu $(-3,-1)$ $\Rightarrow$ fce $g(x)$ klesá v $(-3,-1\rangle$
($g(x)$ je spojitá v R)

a $g'(x) > 0$ v intervalu $(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ fce $g(x)$ roste v $\langle -1,+\infty)$,

tedy, funkce $g(x)$ má v bodě $x=-1$ ostré lokální minimum
($g(-1)=5$, $g(x)>5$ v $(-3,-1)$, $g(x)>5$ v $(-1,+\infty)$)

(ii) uvažujme dále funkci $h(x) = f(x, 2-x)$, $x \in R$:

(graf funkce $h(x)$ je „řez" grafu funkce $f(x,y)$ rovinou o rovnici $y = 2-x$, $h(-1) = f(-1,3) = 5$, směrový vektor přímky $y = 2-x$ (přímky v rovině $z=0$) je vektor $(1,-1)$)



pak $h(x) = f(x, 2-x) =$

$$= x^3 + x(2-x)^2 + 6x^2 + (2-x)^2 = \dots$$

$$\dots = 2x^3 + 3x^2 + 4$$

(úpravy jsou „vynechány", zkontrolujte, chcete-li),

a tedy $h'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

a $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

(a opět už víme, že $h'(-1) = 0$, neboť $h'(-1) = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(-1,3) = 0$ kde $\vec{a} = (1,-1)$ je směrový vektor přímky $y = 2-x$, neboť

$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(-1,3) = \nabla f(-1,3) \cdot \vec{a} = 0$ ($\nabla f(-1,3) = (0,0)$, bod $(-1,3)$ je stacionární bod funkce $f(x,y)$).

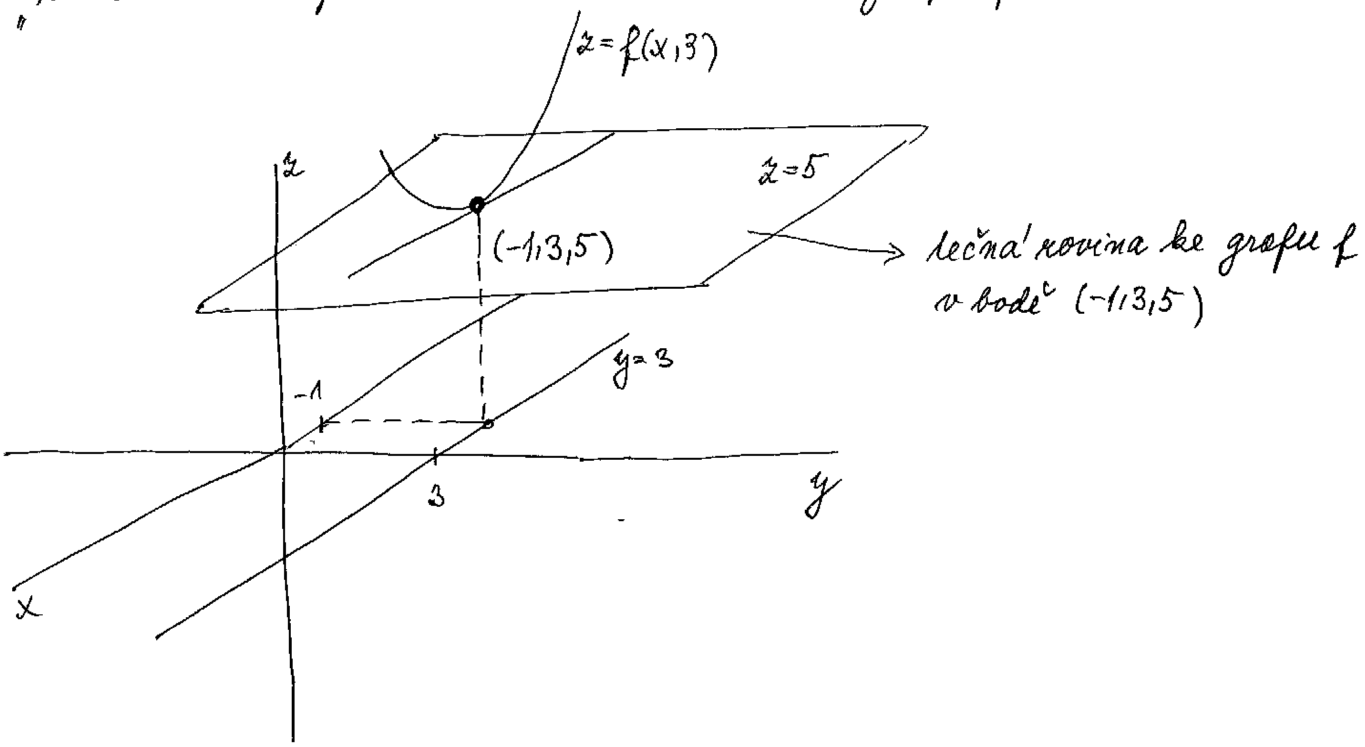
a podobně jako v (i):

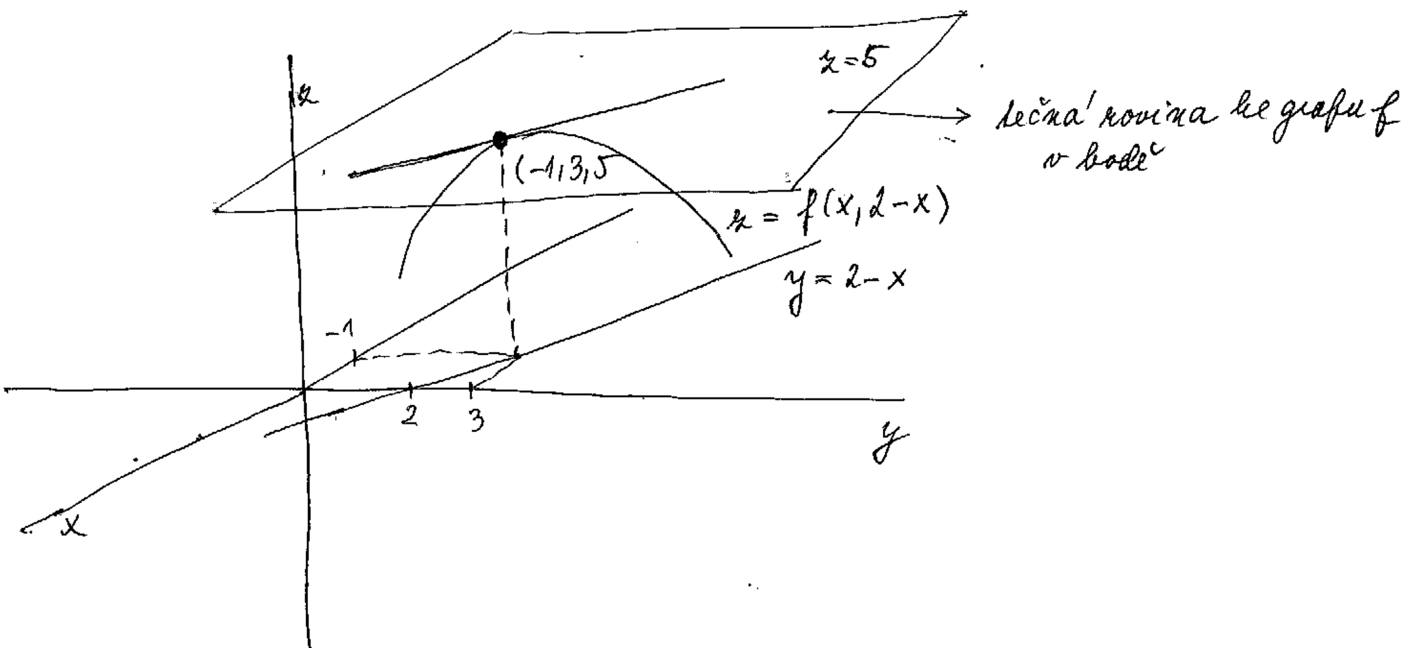
$h'(x) > 0$ v $(-\infty,-1)$ $\Rightarrow$ $h(x)$ je rostoucí v intervalu $(-\infty,-1\rangle$
($h(x)$ je spojitá v R), tedy ($h(-1)=5$)
$h(x) < 5$ v intervalu $(-\infty,-1)$

a $h'(x) < 0$ v $(-1,0)$ $\Rightarrow$ $h(x)$ je klesající v intervalu $\langle -1,0\rangle$,
$h(x) < 5$ v intervalu $(-1,0)$,

(funkce $h(x)$ má v bodě $x=-1$ ostré lokální maximum).

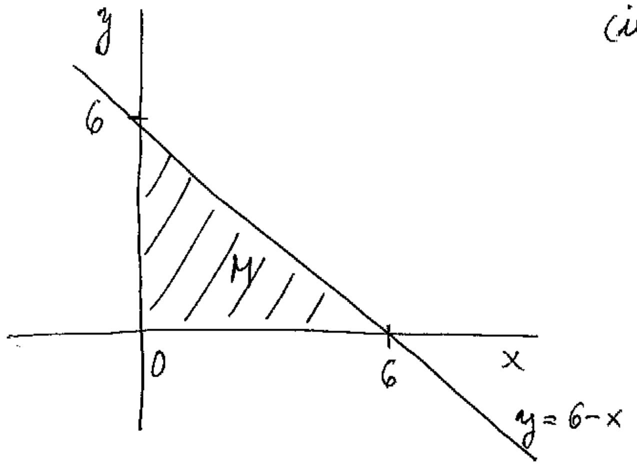
Tedy vidíme, že v libovolném okolí bodu $(x_0, y_0) = (-1, 3)$ jsou body $(x, 3, f(x,3))$ grafu funkce f „nad" tečnou rovinou ke grafu funkce f v bodě $(-1,3,5)$ a body $(x, 2-x, f(x,2-x))$ grafu f „pod" tečnou rovinou v bodě grafu $(-1,3,5)$ – tedy asi je zde opět takové „trošku hůře představitelné" „sedlo" na grafu f.





2. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 y(4-x-y)$ na množině $M = \{[x,y] \in R^2; x+y \le 6 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$.

(i) množina $M \subset R^2$ je množina omezená a uzavřená v R^2, tedy kompaktní, funkce f je spojitá na M, tedy funkce f nabývá na M globálních extrémů;



(ii) globální extrémy funkce f jsou buď na hranici množiny M, tj. na úsečce $y=0$, $x \in \langle 0,6 \rangle$, nebo na úsečce $x=0$, $y \in \langle 0,6 \rangle$, nebo na úsečce $y = 6-x$, $x \in \langle 0,6 \rangle$

(přesněji zapsáno:

$\partial M = \{[x,y] \in R^2 : y=0 \wedge x \in \langle 0,6 \rangle\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in R^2 : x=0 \wedge y \in \langle 0,6 \rangle\} \cup$
$\cup \{[x,y] \in R^2 ; y = 6-x \wedge x \in \langle 0,6 \rangle\}$),

nebo uvnitř M (tj. v M^0), v některém z bodů, kde je lokální extrém funkce f.

1) Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce f v $M^0 = \{[x,y] \in R^2, x>0, y>0, x+y<6\}$:

$f \in C^{(1)}(M^0)$, tedy lokální extrémy funkce f mohou být jen ve stacionárních bodech funkce f v M^0;

nalezení stacionárních bodů:

stacionární body f jsou řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad ;$$

tedy pro funkci $f(x,y) = x^2 y(4-x-y)$ máme soustavu rovnic

$$(1) \qquad xy(8-3x-2y) = 0$$
$$(2) \qquad x^2(4-x-2y) = 0$$
v M^0

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y \right)$$

Je-li $(x,y) \in M^0$, pak $x>0$ i $y>0$, tedy dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \quad (\text{z rovnice } (2)) \\ 3x + 2y &= 8 \quad (\text{z rovnice } (1)) \end{aligned},$$

která má v M^0 jediné řešení – bod $[2,1]$.

Pomocí Hessiánu funkce f zkusme vyšetřit, zda f má v bodě $[2,1]$ lokální extrém:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8y - 6xy - 2y^2 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x^2 ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8x - 3x^2 - 4xy \left(= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \right),$$

tedy: $$H(2,1) = \begin{vmatrix} -6, & -4 \\ -4, & -8 \end{vmatrix} = 48 - 16 = 32 > 0,$$

a $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = -6 < 0,$$

tedy funkce f má v bodě $[2,1]$ ostré lokální maximum, $f(2,1) = 4$.

2) Vyšetření funkce f na hranici množiny M:

hranice M je sjednocení tří úseček, označme si $\partial M = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3$;

$\omega_1 = \{(x,y) \in R^2;\ x=0,\ 0 \le y \le 6\}$, na ω_1 je $f(0,y) = g_1(y) = 0$;

$\omega_2 = \{(x,y) \in R^2;\ y=0,\ 0 \le x \le 6\}$, na ω_2 je $f(x,0) = g_2(x) = 0$;

$\omega_3 = \{(x,y) \in R^2;\ y = 6-x,\ 0 \le x \le 6\}$, na ω_3 je funkce f opět jen funkce jedné proměnné, $f(x, 6-x) = g_3(x)$, kde

$$g_3(x) = x^2 \cdot (6-x)(4-x-(6-x)) = 2x^2(x-6) \; , \quad x \in \langle 0,6 \rangle ;$$

kritické body pro extrém funkce $g_3(x)$ v intervalu $\langle 0,6 \rangle$ jsou body $x=0$, $x=6$ a body v intervalu $(0,6)$, kde $g_3'(x) = 0$:

$g_3(0) = g_3(6) = 0$; $g'(x) = 0 \wedge x \in (0,6) \Leftrightarrow x = 4$, $g_3(4) = f(4,2) = -64$;

$(g'(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x-4),\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4)$

A shrnutí našeho vyšetřování:

1) v M^0 (tj. uvnitř zadané množiny M) je jediný lokální extrém v bodě $(2,1)$ (zjistili jsme, že f má zde ostré lokální maximum – pro vyšetření globálních extrémů toto není třeba, extrémy globální určíme dle hodnot dané funkce v bodech kritických pro extrém);

2) na hranici množiny M je $f(x,0)=0$ pro $x \in \langle 0,6 \rangle$, $f(0,y)=0$ pro $y \in \langle 0,6 \rangle$ a bod „podezřelý" z extrému na ω_3 je bod $(4,2)$, a $f(4,2) = -64$.

Tedy – funkce f nabývá ostrého globálního maxima v M^0, v bodě $(2,1)$, $f(2,1)=4$ a

funkce f má ostré globální minimum v bodě $(4,2)$ na hranici M $((4,2) \in \omega_3)$, $f(4,2) = -64$.

3. a) Ukažte, že rovnicí $2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$ a podmínkou $z(-2,0)=1$ je definována v okolí bodu $(-2,0,1)$ implicitní funkce $z=z(x,y)\in C^2(U(-2,0))$.
b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ je stacionárním bodem funkce $z=z(x,y)$.
c) Vyšetřete, zda funkce $z=z(x,y)$ má v bodě $(-2,0)$ lokální extrém.

---

a) označme si $F(x,y,z)$ funkci (ze zadání rovnice)

$$F(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$$

a $(x_0,y_0,z_0)=(-2,0,1)$;

ověřme předpoklady věty o implicitní funkci (viz proměnná domácího úkolu 6):

(1) $F(x,y,z)\in C^{(\infty)}(R^3)$

(2) $F(-2,0,1) = 8+0+1-16-1+8=0$

(3) $\frac{\partial F}{\partial z}(-2,0,1) = 3z^2+8x-1\Big|_{(-2,0,1)} = 3-16-1=-14\neq 0;$

tedy, dle věty o implicitní funkci je rovnicí $F(x,y,z)=0$ v okolí bodu $(-2,0,1)$ definována implicitně funkce $z=z(x,y)$ taková, že $z(-2,0)=1$ a existuje okolí $U((-2,0))$ takové, že $z(x,y)\in C^{(\infty)}(U((-2,0))$ a v tomto okolí platí:

$$2x^2+2y^2+z^3(x,y)+8x\,z(x,y)-z(x,y)+8=0. \quad (*)$$

b) <u>Bod $(x_0,y_0)=(-2,0)$ je stacionárním bodem funkce $z(x,y)$, tedy $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0)=0$.</u>

<u>Výpočet derivací funkce $z(x,y)$</u> derivováním rovnice $(*)$, kterou funkce $z(x,y)$ splňuje v okolí $U((-2,0))$:

(i) <u>$\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0)$</u>: derivujme rovnici $(*)$ podle x, pak dostaneme:

$$4x+3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+8z(x,y)+8x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0$$

tj.

$$(**)\quad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)=-8z(x,y)-4x,$$

a v bodě $(-2,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cdot(-14)=0,$$

<u>tedy, $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0)=0$</u>

(ii) $\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0)}$: derivujme rovnici (*) podle y, pak dostaneme:

$$4y + 3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 8x\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0,$$

a po úpravě

$$(***)\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right) = -4y,$$

v bodě $(-2,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0)\cdot(-14) = 0,$$

tedy, $\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0)=0}$,

tedy, <u>bod $(-2,0)$ je stacionární bod funkce $z(x,y)$.</u>

c) Zbývá vyšetřit, zda funkce $z(x,y)$ má v bodě $(x_0,y_0)=(-2,0)$ lokální extrém – zkusíme to pomocí Hessiánu funkce $z(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0)=(-2,0)$.

Výpočet parciálních derivací druhého řádu funkce $z(x,y)$:

(i) $\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,0)}$: derivujme rovnici (**) dle x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2(x,y)+8x-1\right) = -8\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)-4$$

v $(-2,0)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,0)\cdot(-14) + 0 = -4$

(neboť $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0)=0$), tedy $\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,0) = +\frac{2}{7}}$

(ii) $\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-2,0)}$ $\left(=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(-2,0)\right)$: derivujme rovnici (**) podle y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(3z^2(x,y)+8x-1\right) = -8\frac{\partial z}{\partial y}(x,y),$$

v $(-2,0)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-2,0)\cdot(-14) + 0 = 0,$

tedy $\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-2,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(-2,0) = 0}$

(iii) $\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)}$: derivujme rovnici (***) dle y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)=-4\,,$$

v $(-2,0)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)\cdot(-14) \quad + \quad 0 \qquad = -4\,,$

tedy $\quad \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)=\frac{2}{7}}$

(opět víme, že $\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0)=0$)

<u>Poznámka:</u> ještě můžeme „zkontrolovat" výpočet $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,0)$ derivováním rovnice (***) dle x :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x,y)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)=0$$

v $(-2,0)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,0)\,.\,(-14) \ + \ 0 \qquad = 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-2,0)=0}$$

A pak už „máme" Hessián funkce f v bodě $(-2,0)$:

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{H}_f(-2,0)=\begin{vmatrix} \frac{2}{7}, & 0 \\ 0, & \frac{2}{7} \end{vmatrix}=\left(\frac{2}{7}\right)^2>0\,, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-2,0)>0 \ \left(\text{stejně tak i } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)>0\right) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>funkce $z(x,y)$ má v bodě $(x_0,y_0)=(-2,0)$ ostré lokální minimum.</u>

Dodatek k řešení příkladu:

Zkusme ještě (jako cvičení) užít pro výpočet derivací funkce $z(x,y)$ vzorce z věty o implicitní funkci:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(-2,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(-2,0,1)} = -\frac{0}{-14} = 0, \text{ a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(-2,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(-2,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(-2,0,1)} = -\frac{0}{-14} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 4x + 8z, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 4y \right)$$

Asi se bude jevit tento výpočet jednodušší než výpočet parciálních derivací derivováním rovnice (*). Ale je třeba „dát pozor" při užití vzorců pro výpočet parciálních derivací funkce $z(x,y)$ druhého řádu – (!) ve vzorcích pro výpočet derivací implicitně definované funkce $z(x,y)$ už „z" není nezávislé proměnná funkce $F(x,y,z)$, ale zde jsou funkce $F(x,y,z)$ a její parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$ složené s „implicitní" funkcí $z(x,y)$!

Tedy: $$\underline{\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = \underline{-\frac{4x + 8z(x,y)}{3z^2(x,y)+8x-1}},$$

a pak $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = -4\,\frac{\left(1+2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)-\left(x+2z(x,y)\right)\left(6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+8\right)}{\left(3z^2(x,y)+8x-1\right)^2},$$

a tedy $$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)} = -4\,\frac{-14-0}{(-14)^2} = \underline{\frac{2}{7}}$$

(opět užijme: $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,0) = 0$, $z(-2,0) = 1$)

a zbume třeba ještě vypočít $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2,0)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(- \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \right) = -4 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x + 2z(x,y)}{3z^2(x,y)+8x-1} \right) =$$

$$= -4 \; \frac{2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)(3z^2(x,y)+8x-1) - (x+2z(x,y)) \cdot 6z(x,y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(3z^2(x,y)+8x-1)^2} ,$$

a $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2,0) = -4 \; \frac{0 + 0}{(-14)^2} = \underline{0} ;$$

a podobně určíme $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)$ a odtud i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)$ – zbume ještě (jako cvičení!)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(- \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-4y}{3z^2(x,y)+8x-1} \right) =$$

$$= -4 \cdot \frac{1 \cdot (3z^2(x,y)+8x-1) - y \cdot 6z(x,y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(3z^2(x,y)+8x-1)^2} , \text{ pak}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-2,0)} = -4 \; \frac{-14 + 0}{(-14)^2} = \underline{\frac{2}{7}} .$$

A odtud je asi „vidět", že pokud potřebujeme určit parciální derivace vyšších řádů funkce, definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) = 0$, „u nás" to byla funkce $z = z(x,y)$, je dost jednodušší derivace „počítat" derivováním rovnice, kterou funkce splňuje v okolí bodu (x_0,y_0) ($F(x_0,y_0,z_0) = 0$), tj. derivováním rovnice $F(x,y,z(x,y)) = 0$.

4. Při jakých rozměrech má pravoúhlá vana daného objemu V nejmenší povrch?

Řešení:

vanu v zadání příkladu uvažujeme jako hranol bez „horního víka", označme a, b strany obdélníka, který je „dnem" vany, výšku vany označme c $(a>0, b>0, c>0)$;

pak daný objem $V = a.b.c$, tedy, je-li zadán objem V, můžeme volit dvě strany, a třetí strana kvádru je pak už dána.

Zvolme a, b, pak $c = \frac{V}{ab}$ $(a>0, b>0)$. Povrch vany je pak $S(a,b) = a.b + 2(ac+bc) = ab + 2V\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$.

Úkolem je najít „rozměry" vany a, b (c je pak už určeno) tak, aby povrch vany byl minimální, tedy „matematicky" – hledáme globální minimum funkce $S(a,b)$ na množině $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Označme raději (dle zvyku) $a = x$, $b = y$, pak tedy budeme vyšetřovat globální extrémy funkce

$$S(x,y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \quad \text{na } M = (0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

Funkce $S(x,y)$ je spojitá na otevřené množině M, navíc neomezené, tedy nemůžeme hned „na začátku" nic o existenci globálních extrémů říci. ale:

$$\lim_{x\to+\infty} S(x,y_0) = \lim_{x\to\infty}\left(xy_0 + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y_0}\right)\right) = +\infty \text{ pro lib. } y_0>0,$$

a $$\lim_{x\to 0+} S(x,y_0) = \lim_{x\to 0+}\left(xy_0 + 2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y_0}\right)\right) = +\infty \text{ pro lib. } y_0>0 \; (V>0),$$

a analogicky $\lim\limits_{\substack{y\to 0+\\ y\to+\infty}} S(x_0,y) = +\infty$ pro lib. $x_0>0$.

Jedy asi si „představíme", že funkce $S(x,y)$ v M nemá globální maximum, ale že bude mít v M globální minimum; a protože funkce $S(x,y) \in C^{(2)}(M)$, globální minimum fce bude „ve"-stacionárním bodě funkce $S(x,y)$ – najdeme tedy stacionární body funkce f v M, tj. body, kde obě parciální derivace $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$ jsou rovny nule:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = y - \frac{2V}{x^2}\ , \quad \underline{\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) = 0 \iff yx^2 = 2V \quad (1)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = x - \frac{2V}{y^2}\ , \quad \underline{\frac{\partial S}{\partial y}(x,y) = 0 \iff xy^2 = 2V \quad (2)};$$

Jedy „musí" platit $\quad xy^2 = yx^2$, tj. $xy(y-x) = 0 \quad (3)$,

a protože je $x>0$ i $y>0$, rovnice (3) je splněna „právě když" $y=x$; pak z (1) dostáváme: $\quad x^3 = 2V \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V} = y$,

tedy funkce $S(x,y)$ má v M jediný stacionární bod, a to bod $\underline{(x_0,y_0) = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)}$, tedy základna hranolu (dno vany) je čtverec o straně $\underline{a = b = \sqrt[3]{2V}\ \ (V\text{ - dáno})}$;

výška vany je pak $\underline{c} = \frac{V}{ab} = \frac{V}{\sqrt[3]{(2V)^2}} = \underline{\sqrt[3]{\frac{V}{4}}}$

Ještě zkusme ověřit, že je zde minimum, ukažme si, že v bodě $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ má funkce $S(x,y)$ ostré lokální minimum, pak díky limitám pro $x \to +\infty$, $y \to +\infty$, $x \to 0+$, $y \to 0+$ zde „asi" je minimum globální funkce $S(x,y)$:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{x^3}, & 1 \\ 1, & \frac{4V}{y^3} \end{vmatrix}, \quad \text{tj. } H\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{2V}, & 1 \\ 1, & \frac{4V}{2V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 > 0 \implies \text{v bodě } \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) \text{ je ostré}$$

lokální minimum fce $S(x,y)$, tedy dle našich „úvah" i minimum globální (toto nedokazujeme, ale „asi" to tak je).